

3- Çok Terimli Dağılım: (Multinomial)

Bu dağılım, binom dağılımının genelleştirilmesidir. E_1, E_2, \dots, E_k bir deneyin ayrık sonuçları olsunlar.

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + \dots + P(E_k)$$

x_1, x_2, \dots, x_k t.d. leri n tane bağımsız denemede her bir E_j ($j=1, \dots, k$) nin kaç kez elde edildiğinin sayısı ve bir tek denemede E_j 'nin elde edilme olasılığı P_j ($j=1, \dots, k$) olsun.

Bu durumda x_1, \dots, x_k t.d. lerinin oluşturduğu dağılıma çok terimli dağılım denir ve olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir;

$$P(x_1 = x_1, \dots, x_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \cdot P_1^{x_1} \dots P_k^{x_k},$$

$$\sum_{j=1}^k x_j = n, \quad \sum_{j=1}^k P_j = 1$$

Olasılık fonksiyonundaki sayılar, $(P_1 + \dots + P_k)^n$ ifadesinin açılımındaki terimler olduğundan çok terimli dağılımı oluştururlar. $k=2$ olduğunda binom dağılımı elde edilir.

$$E(x_j) = n \cdot P_j, \quad V(x_j) = n \cdot P_j \cdot q_j$$

$$\Phi_{x_j}(t) = (P_j \cdot e^{it} + q_j)^n \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

Örnek: Hilesiz bir zar p kez atılıyor. 5 ve 6'nın iki kez ve diğer sayılardan her birinin birer kez gelme olasılığını bulunuz.

Görüm: x_j : j . nci yüzün gelme sayısı olsun.

$$n = \sum_{j=1}^k x_j = 6, \quad k=6$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

$$P(x_1=1, x_2=1, \dots, x_4=1, x_5=2, x_6=2) = \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{35}{5184} = 0.0067$$

Örnek: Bir sınıfta, 15 mavi, 25 siyah ve 10 yeşil gözlü öğrenci vardır. Her öğrencinin numarası bir kağıda yazılıp torbaya atılıyor. İadeli ve çekimler birbirinden bağımsız olarak yapılıyor. 5 siyah, 2 yeşil ve 3 mavi gözlü öğrencinin seçilmesi olasılığı nedir? Mavi gözlü öğrencilerin beklenen değer ve varyansını, siyah gözlüler için karakteristik fonksiyonu bulunuz?

Görüm: x_1 : Seçilen mavi gözlü öğrenci sayısı,
 x_2 : " " " " " "
 x_3 : " " " " " "

$$P(M) = \frac{15}{50}$$

$$P(S) = \frac{25}{50}$$

$$P(Y) = \frac{10}{50}$$

$$n = \sum_{j=1}^3 x_j = 10$$

Mavi gözlü seçme olasılığı,

Siyah " " " "

Yeşil " " " "

öğrenci seçiliyor.

$$\Rightarrow P(x_1=3, x_2=5, x_3=2) = \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 0.085$$

Mavi gözlü öğrencilerin;

$$E(x_1) = n \cdot p_1 = 10 \cdot \frac{3}{10} = 3 //$$

(10 öğrenci seçilirse bunların 3'ünün mavi gözlü olması beklenir.)

$$V(x_1) = n \cdot p_1 \cdot q_1 = 10 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$= \frac{21}{10} = 2.1 //$$

Siyah gözlüler için karakteristik fonk.

$$\Phi_{x_2}(t) = (p_2 \cdot e^{it} + q_2)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot e^{it} + \frac{1}{2} \right)^{10} //$$